



# Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a XI-a

**SOLUȚII**

**Problema 1.** Să se rezolve, în mulțimea  $M_2(\mathbb{R})$ , ecuația:  $X^{2010} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ .

**Florin Antohe, profesor, Galați**

**Soluție:**

$$\det(X^{2010}) = 0 ; \det(X^{2010}) = (\det(X))^{2010} = 0 \Rightarrow \det(X) = 0 .$$

$$\text{Fie } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ cu } \det(X) = a \cdot d - b \cdot c = 0 .$$

Din relația Cayley-Hamilton , rezultă că

$$X^{2010} = (a+d)^{2009} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (TrX)^{2009} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Obținem sistemul:

$$\begin{cases} (a+d)^{2009} a = 4 \\ (a+d)^{2009} b = 6 \\ (a+d)^{2009} c = 8 \\ (a+d)^{2009} d = 12 \end{cases}$$

Din prima și ultima ecuație, rezultă că:  $(a+d)^{2010} = 16$ , de unde  $a+d = 16^{\frac{1}{2010}}$ , deci

$$(a+d)^{2009} = 16^{\frac{2009}{2010}} = p$$

Înlocuind în cele patru relații, obținem :

$$a = \frac{4}{p}; b = \frac{6}{p}; c = \frac{8}{p}; d = \frac{12}{p}$$

$$\text{Deci soluția ecuației este : } X = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}, p = 16^{\frac{2009}{2010}}$$

**Problema 2.** Fie  $X, Y, Z \in M_n(\mathbb{R})$ , matrice care comută două câte două, astfel încât

$$(X-Y)(Y-Z) = O_n. \text{ Să se demonstreze că } \det((X-Y)^4 + (Y-Z)^4 + (Z-X)^4) \geq 0.$$

**Dumitru și Rodica Bălan, profesori, Galați**

**Soluție:** Notăm  $X-Y=A$ ,  $Y-Z=B$ ,  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Rezultă

$$A+B = X-Y+Y-Z = X-Z \text{ și } AB = (X-Y)(Y-Z) = O_n.$$

Cum matricele  $X, Y, Z$  comută două câte două, obținem  $AB = (X - Y)(Y - Z) = XY - XZ - Y^2 + YZ = YX - ZX - Y^2 + ZY$  și  $BA = (Y - Z)(X - Y) = YX - Y^2 - ZX + ZY$ , de unde  $AB = BA = O_n$  (deci matricele  $A$  și  $B$  sunt comutabile).

$$\text{Apoi, } A^2 B^2 = A(AB)B = A(BA)B = (AB)(AB) = (AB)^2 = (BA)^2 = B(AB)A = B(BA)A = (BB)(AA) = B^2 A^2.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \det((X - Y)^4 + (Y - Z)^4 + (Z - X)^4) &= \det(A^4 + B^4 + (A + B)^4) = \\ &= \det\left((A^2 + B^2)^2 - 2A^2 B^2 + [(A + B)^2]^2\right) = \det\left((A^2 + B^2)^2 - 2(AB)^2 + (A^2 + 2AB + B^2)^2\right) = \\ &= \det\left((A^2 + B^2)^2 - 2 \cdot O_n^2 + (A^2 + 2O_n + B^2)^2\right) = \det\left((A^2 + B^2)^2 + (A^2 + B^2)^2\right) = \\ &= \det\left(2(A^2 + B^2)^2\right) = 2^n \cdot \det\left((A^2 + B^2)^2\right) = 2^n \left(\det(A^2 + B^2)\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

### Problema 3.

Fie șirul de numere reale  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definit astfel:  $x_0 > 1$ ,  $x_{n+1} = \frac{2 \cdot x_n + 1}{x_n + 2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

- Să se studieze convergența șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ;
- Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot (\sqrt{x_n} - 1)$ .

**Mihai Totolici, profesor, Galați**

**Soluție: a)**  $x_{n+1} - x_n = \frac{3 \cdot (x_n - x_{n-1})}{(x_n + 2) \cdot (x_{n-1} + 2)}.$

Se demonstrează prin inducție matematică că  $x_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  șir mărginit inferior.(1)

Așadar,  $\text{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \text{sgn}(x_n - x_{n-1}) = \text{sgn}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \dots = \text{sgn}(x_1 - x_0)$ ,

unde  $x_1 - x_0 = \frac{2 \cdot x_0 + 1}{x_0 + 2} - x_0 = \frac{1 - x_0^2}{x_0 + 2} < 0$ , pentru  $x_0 > 1$ . Deci  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este strict descrescător.(2)

Din (1) și (2)  $\xrightarrow{Th.W} (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent.

b) Prin trecere la limită în relația de recurență rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  .(\*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot (\sqrt{x_n} - 1) = [0 \cdot \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{x_n - 1}{\sqrt{x_n} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{x_n - 1} = (*)$$

Apoi,  $x_n - 1 = \frac{2 \cdot x_{n-1} + 1}{x_{n-1} + 2} - 1 = \frac{x_{n-1} - 1}{x_{n-1} + 2}$ , deci

$$\operatorname{sgn}(x_n - 1) = \operatorname{sgn}(x_{n-1} - 1) = \operatorname{sgn}(x_{n-2} - 1) = \operatorname{sgn}(x_{n-3} - 1) = \dots = \operatorname{sgn}(x_0 - 1) = +1.$$

Așadar,  $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Deci,  $\left(\frac{1}{x_n - 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  este șir strict crescător și nemărginit superior.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{x_n - 1}} \stackrel{(Lema S-C)}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1) \cdot (x_{n+1} - 1)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1) \cdot \left(\frac{2 \cdot x_n + 1}{x_n + 2} - 1\right)}{x_n - \frac{2 \cdot x_n + 1}{x_n + 2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1)^2}{x_n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1)}{x_n + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} [2 \cdot n(x_n - 1) + (x_n - 1)] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (x_n - 1) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n - 1}} \stackrel{(Lema S-C)}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - 1) \cdot (x_n - 1)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)^2}{x_n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0. \end{aligned}$$

**Problema 4.** Fie funcția  $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  care are proprietățile :

- $(\forall) a, b \in [0, 1]$  astfel încât  $a + b \leq 1 \Rightarrow f(a) + f(b) \leq f(a + b)$ .
- $f(1) = 1$ .

Se cere:

- Să se determine  $\max_{x \in [0, 1]} f(x)$  și  $\min_{x \in [0, 1]} f(x)$ ;
- Să se demonstreze că funcția are limite laterale finite în orice punct  $x_0 \in (0, 1)$ ;
- Să se construiască o funcție cu proprietățile a) și b).

**Constantin Ursu, profesor, Galați**

**Soluție:** 1. Din ipoteză, rezultă că  $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$  (1)

$$\text{Dacă } a = b = 0 \Rightarrow f(0) + f(0) \leq f(0) \Rightarrow f(0) \leq 0 \quad (2)$$

Din (1) și (2), rezultă  $f(0) = 0 = \min_{x \in [0, 1]} f(x)$ .

Dar  $\forall x \in [0,1] \Rightarrow 1-x \in [0,1]$  și  $x+(1-x)=1 \leq 1$ .

Așadar,  $f(x) + f(1-x) \leq f(1) = 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 \Rightarrow \max_{x \in [0,1]} f(x) = f(1) = 1$ .

**2.**

Fie  $x, y \in [0,1]$  astfel încât  $x \leq y \leq 1$ ;  $x+(y-x)=y \Rightarrow f(x) + f(y-x) \leq f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .

Deci funcția  $f$  este monotonă.

Fie  $x_1, x_2, x_3 \in (0,1) \Rightarrow f(x_1), f(x_2), f(x_3) \in (0, \infty)$ .

Presupunem că  $x_1 < x_2 < x_3$ . Să demonstrăm că  $f(x_2 - 0)$  și  $f(x_2 + 0)$  sunt finite.

Fie funcția  $f$  este crescătoare.

Dacă  $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ ;

Dacă  $x_2 < x < x_3 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_3)$ .

Prin trecere la limită în ambele inegalități, se

obține:  $f(x_1) \leq \lim_{x \nearrow x_2} f(x) \leq f(x_2)$  și  $f(x_2) \leq \lim_{x \searrow x_2} f(x) \leq f(x_3)$ . Așadar,

$f(x_2 - 0)$  și  $f(x_2 + 0)$  sunt finite.

Rezultă că funcția  $f$  are limite laterale finite în orice punct  $x_0 \in (0,1)$ .

**3.**

$$f : [0,1] \rightarrow [0, \infty), f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Se demonstrează că funcția  $f$  verifică proprietățile a) și b).